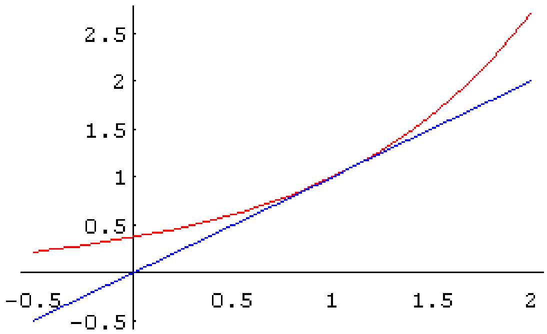
OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 1 de 1997.

(a) De todas tangentes a la gráfica de la función f : R → r definida por $f(x) = e^{x-1}$, halla la que pasa por el origen de coordenadas.
(b) Dibuja la región limitada por la gráfica de f, la recta tangente hallada en el punto anterior y el eje de ordenadas..
(c) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución

(a)
$f(x) = e^{x-1}$, su recta tangente en el punto x = a es $y - f(a) = f'(a).(x - a)$.
En nuestro caso como $f'(x) = e^{x-1}$, la recta tangente es $y - e^{a-1} = e^{a-1}.(x - a)$.
Como pasa por el origen de coordenadas (0,0), tenemos
$0 - e^{a-1} = e^{a-1}.(0 - a)$; de donde obtenemos $e^{a-1}.(a - 1) = 0$, como la exponencial nunca es cero obtenemos como solución a = 1.
Sustituyendo en la ecuación $y - e^{a-1} = e^{a-1}.(x - a)$ sale
$y - e^{1-1} = e^{1-1}.(x - 1)$; como $e^0 = 1$, operando sale que la recta tangente en (0,0) es y = x.
(b)
La gráfica de $f(x) = e^{x-1}$ (en rojo) es igual que la de e^x, pero desplazada una unidad a la derecha en el eje de abcisas.
La gráfica de y = x (en azul) es una recta y con dos valores es suficiente.



(c)
Para hallar el área encerrada por dos funciones tenemos que ver sus puntos de corte, es decir las soluciones de $e^{x-1} = x$. Como se observa dándole a x el valor 1 coinciden

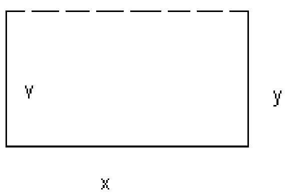
$$\text{Area}=\int_0^1 \left(e^{x-1}-x\right)dx=\left[e^{x-1}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = (e^0 - ½) - (e^{-1} - 0) \cong 0'1321 \text{ u.a.}$$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 1 de 1997.

El alcalde de un pueblo quiere cercar un recinto rectangular cerrado para celebrar las fiestas. Para ello aprovecha una tapia existente como uno de los lados y dispone de 300 m. de tela metálica para hacer los otros tres.
(a) ¿Podrías indicar las dimensiones del recinto acotado de esa forma cuya área es la mayor posible?
(b) La comisión de fiestas del pueblo ha calculado que para montar las atracciones, pista de baile, etc., necesitan 8000 m^2. Teniendo en cuenta los cálculos realizados en el apartado anterior, ¿será suficientemente grande el recinto que quiere preparar el alcalde?

Solución

(a)



El área del rectángulo sería A = x.y, y la relación entre las variables es 2y + x = 300, de donde x = 300 – 2y.
La función a maximizar será $A = x.y = (300 - 2y).y = 300y - 2y^2$.
A ' = 300 – 4y; A' = 0, nos da 300 – 4y = 0, de donde y = 75 y x = 300 – 2(75) = 150
Obtenemos un rectángulo donde x = 150 m. e y = 75 m.
Comprobamos que es un máximo, pues A '' = - 4 < 0, lo que me lo confirma.
(b)
el área es A = x.y = 75.150 = 11250 m^2.
Como se necesitan 8000 m^2, todavía nos sobran 3250 m^2.

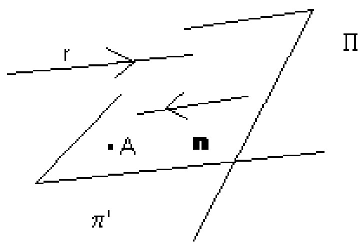
Ejercicio 3 de la opción A del modelo 1 de 1997.

Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P = (1, 0, 2), es paralelo a la recta:

$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z-3$, y es perpendicular al plano $\Pi \equiv 2x - y + z = 0$

Solución

(a)



El plano Π tiene como punto P = (1,0,2) y como vector paralelo **v** = (2,3,1), que el director de la recta r y **n** = (2,-1,1) (que es el vector normal del plano Π. Por tanto el plano pedido es:

$$\Pi' \equiv 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1).4 - (y-0).0 + (z-2).(-8) = 4x - 8z + 12 = 0$$

(b)

el área es A = x.y = 75.150 = 11250 m^2.

Como se necesitan 8000 m^2, todavía nos sobran 3250 m^2.

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 1 de 1997.

(a) Define el concepto de matriz inversa de una matriz cuadrada.

(a) ¿Qué condición debe cumplir el determinante de una matriz cuadrada para que ésta sea invertible?

(b) Estudia si hay algún valor de *a* para el que la siguiente matriz tiene inversa: $\begin{pmatrix} 1 & a & 3-2a \\ 1 & a+1 & a-5 \\ 3 & 3a+1 & 1-3a \end{pmatrix}$

Solución

(a)

La matriz A es la inversa de la matriz B si y solo si A.B = B.A = I, siendo I la matriz unidad, y por supuesto siendo A y B matrices cuadradas del mismo orden.

(b)

La matriz A tiene inversa si y solo si det(A) = $|A| \neq 0$

(c)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3-2a \\ 1 & a+1 & a-5 \\ 3 & 3a+1 & 1-3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 3-2a \\ 0 & 1 & 3a-8 \\ 0 & 1 & -8+3a \end{vmatrix} = 1.(-8 + 3a - 3a + 8) = 0.$$

Como el determinante vale cero, independientemente del valor de a, dicha matriz no tiene nunca inversa.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 1 de 1997.

De una función f se sabe que es polinómica de tercer grado, que sus primeras derivadas en los puntos x = 3 y x = - 1 son nulas, que f(2) = 5, que f(1) = 2 y que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Haz un esbozo de la gráfica de f sin realizar ningún cálculo justificando como lo haces a partir de los datos

Solución

(a)

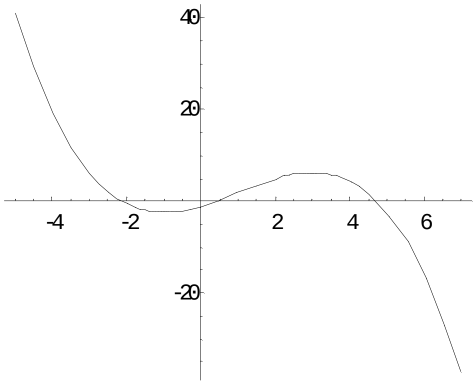
Como f(x) es de tercer grado es de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Como me dicen que f ' (-1) = 0 y f ' (3) = 0, me están diciendo que x = -1 y x = 3 son posibles máximos o mínimos de f(x).

Al decirme que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ me están diciendo que la función viene desde + ∞, que el coeficiente de x^3, a es negativo, y como es de tercer grado la función vale - ∞ en + ∞.

Al decirme que f(1) = 2 y que f(2) = 5, como en x = 3 hay un posible máximo o mínimo, veo que va creciendo y como en + ∞ vale - ∞. En x = 3 hay un máximo y en x = -1 un mínimo.

Por tanto un esbozo de la gráfica sería:



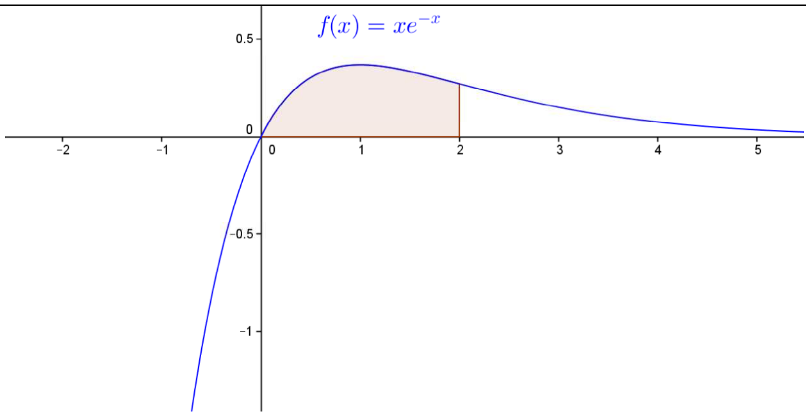
La función se puede calcular, y lo vamos a hacer aunque no lo pidan:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
De f(2) = 5 y f(1) = 2 , sustituyendo en f(x) obtenemos:
$2 = a + b + c + d$
$5 = 8a + 4b + 2c + d$
De f ' (-1) = 0 y f ' (3) = 0 , sustituyendo en f ' (x) obtenemos:
$0 = 3a - 2b + c$
$0 = 27a + 6b + c$
Resolviendo estas cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas se obtiene
a = -3/11, b = 9/11, c = 27/11, d = -11/11= -1 y la función es
$f(x) = (-3/11)x^3 + (9/11)x^2 + (27/11)x - 1$

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 1 de 1997.

(a) Halla el punto de inflexión de la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = x.e^{-x}$.
(b) Dibuja la región limitada por la gráfica de f, el eje OX y la recta x = b donde b es la abcisa del punto de inflexión hallado en el apartado anterior.
(c) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior

Solución

(a)
Los puntos de inflexión de f(x) anulan f '' (x) = 0, y después hay que ver que cambia de signo a izquierda y derecha de dichos puntos.
$f(x) = x.e^{-x}$
$f'(x) = e^{-x} + x.\ e^{-x}.(-1) = e^{-x}(1 - x)$.
Si igualamos f ' (x) = 0 nos sale x = 1 (la exponencial nunca se anula), que será un posible máximo o mínimo (lo veremos en el apartado (b)
$f''(x) = e^{-x}.(-1).(1 - x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x - 2)$.
Igualando a cero, f '' (x) = 0, como la exponencial no es cero obtenemos x = 2.
Como f ''(x) < 0 si x < 2, f(x) es "cóncava" (en Andalucía, es decir de la forma $\cap$)
Como f ''(x) > 0 si x > 2, f(x) es "convexa" (en Andalucía, es decir de la forma $\cup$)
Luego x = 2 es punto de inflexión pues en él hay cambio de concavidad
(b)
Vamos a dibujar la gráfica de f(x), entre el eje de abcisas y la recta x = 2
El dominio de f(x) es $\Re$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, por tanto la recta y = 0, es una asíntota horizontal en $+\infty$
x = 1 anula f ' (x)
Como f '(x) > 0 si x < 1, f(x) es creciente en x < 1
Como f '(x) < 0 si x > 1, f(x) es decreciente en x > 1
Por definición en x = 1 hay un máximo.
Luego la gráfica pedida es



(c)

Calculamos primero la integral $\int x.e^{-e}\,dx$, que es por partes

u = x; dv = $e^{-x}dx$, con lo cual du = dx, v = $\int e^{-x}dx = -e^{-x}$ y aplicando la fórmula de las integrales por partes $\int udv = uv - \int v\,du$, obtenemos

$\int x.e^{-x}\,dx = -x.e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x.e^{-x} - e^{-x}$

$$Area = \int_0^2 x.e^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^2 = (-2.e^{-2} - e^{-2}) - (0 - e^{0}) \cong 0'593994 \text{ u.a.}$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 1 de 1997.

(a) Define lo que son vectores linealmente independientes en R^3.
(b) Prueba que los vectores **u** = (2, -1, 0) y **v** =(1, 0, 1) son linealmente independientes.
(c) Halla el valor de t para el cual el vector **w** = (8, -5, t) depende linealmente de **u** y **v**.

Solución

(a)
Los vectores $\mathbf{v_i}$ con i = 1, 2, ..., n son linealmente independientes si y solo si la expresión $\lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \dots\dots + \lambda_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ es cierta con todos los $\lambda_i = 0$ **.**

(b)
En nuestro caso a**u** + b**v** = **0**
a(2,-1,0) + b(1,0,1) = (0,0,0). Operando
(2a + b, -a, b) = (0,0,0). Igualando tenemos
2a + b = 0, -a = 0, b = 0, de donde a = b = 0 y los vectores **u** y **v** son linealmente independientes

(c)
Para que **w** dependa linealmente de **u** y **v** se tiene que verificar que **w** = a**u** +b**v**
w = a**u** +b**v** sustituyendo
(8,-5,t) = a(2,-1,0) + b(1,0,1) = (2a + b, -a, b). Igualando tenemos
2a + b = 8, -a = -5, b = t, de donde obtenemos a = 5, b = -2 y t = -2, para que sean dependientes.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 1 de 1997.

(a) Para los diferentes valores del parámetro real a estudia la posición relativa de los planos dados por:

$$\Pi_1 : x+y+z = a-1$$
$$\Pi_2 : 2x+y+az = a$$
$$\Pi_3 : x+ay+z = 1$$

(b) si a = - 1, ¿en qué punto se cortan?

Solución

(a)
Sean A y A* la matriz de os coeficientes y la matriz ampliada del sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si |A| ≠ 0, el sistema tiene solución única

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & a-2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}= 1.(-(a-2)(a-1))$$

Si a ≠ 2 y a ≠ 1, el sistema tiene solución única, y los tres planos se cortan en un punto.

Si a = 2

Tenemos |A| = 0, y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, rango (A) = 2

En A*, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tanto rango(A*) = 2

Por el Teorema de Rouché-Frobeniüs rango(A) = rango(A*), el sistema tiene solución, y los tres planos se cortan en una recta. Además un plano depende de los otros dos.

Si a = 1

Tenemos |A| = 0, y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, rango (A) = 2

En A*, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto rango(A*) = 3

Por el Teorema de Rouché-Frobeniüs como rango(A) $\neq$ rango(A*), el sistema no tiene solución, y tenemos dos planos paralelos cortados por el otro.

(b)
Si a = -1, nuestro sistema es

$$\begin{aligned} x+y+z&=-2 \\ 2x+y-z&=-1 \\ x-y+z&=1 \end{aligned}$$

Operando con las ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} x+y+z&=-2 \\ 0-y-3z&=3 \\ 0-2y+0&=3 \end{aligned}$$

y sus soluciones son y = -3/2, z = -1/2, x = 0. por tanto los tres planos se cortan en el punto (x,y,z) = (0,-3/2,-1/2)